

## 4. Derived Category and Canonical Bundle - I

<あとすじ> 全  $\sim$  smooth, proj. /  $k$ .

◦ 導来同値ならば等次元.

## 1. Ample (anti-) canonical bundle $\omega_X$ or $\omega_X^\vee$ : ample を仮定.

◦ 三角圏の "point like object", "invertible object" を定義.

◦  $D^b(X) \rightarrow$  は  $\left\{ k(x)[m] \right\}_{m \in \mathbb{Z}}^{x \in X}$  <sup>(4.3)</sup> <sub>(4.6)</sub>,  $\left\{ L[m] \right\}_{m \in \mathbb{Z}}^{L \in \text{Pic}(X)}$  <sup>(4.8)</sup> <sub>(4.9)</sub> に正確に一致.

◦ 導来同値ならば同型. (4.11)

## 2. Autoequivalences for ample (anti-) canonical bundle 同仮定.

◦  $\underbrace{\text{Aut}(D^b(X))}_{D^b(X) \text{ の 自己同値}} \cong \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{シフト}} \times \left( \underbrace{\text{Aut}(X)}_{X \text{ の 自己同型}} \ltimes \underbrace{\text{Pic}(X)}_{\text{可逆層のテンソル}} \right)$

## 3. Ample sequences in derived categories (一般の Abel 圏や導来圏)

◦  $D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$  が ample seq. 上  $\sim$  f.f. ならば f.f. (4.21) Orlov

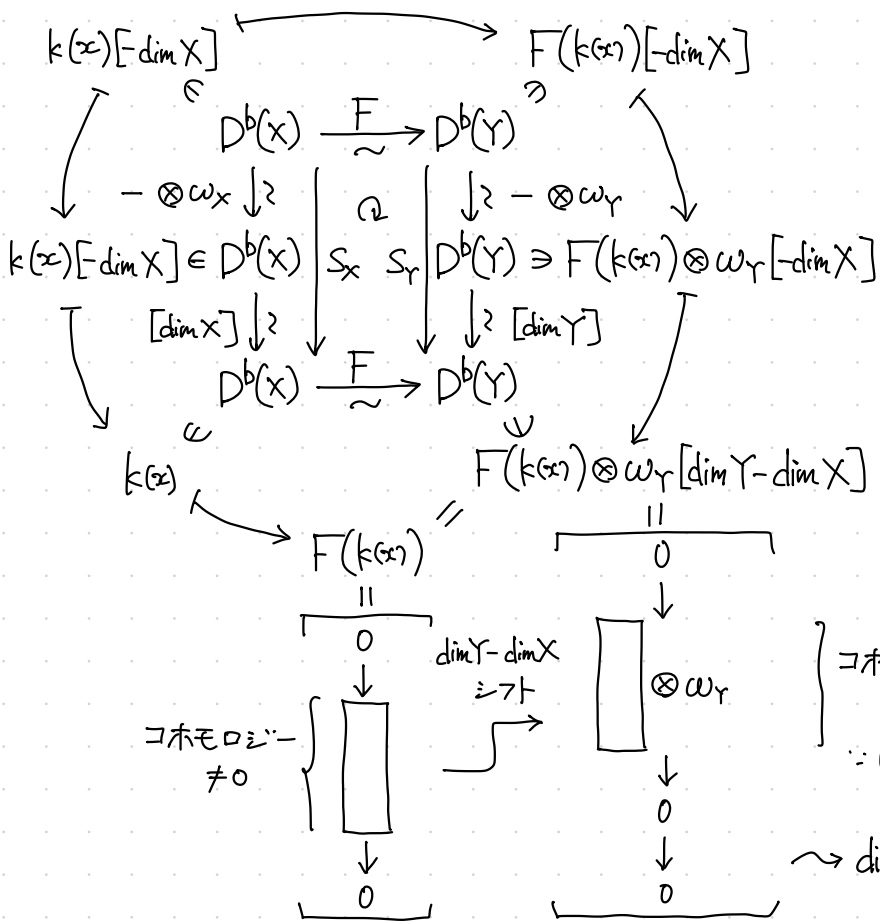
◦  $D^b(X) \hookrightarrow D^b(Y)$  が ample seq. 上  $\sim$  Id ならば Id. (4.23, 追加) Bondal-Orlov

◦  $D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$  が ample seq. 上  $\sim$  同型ならば同型. (4.24) Kawamata

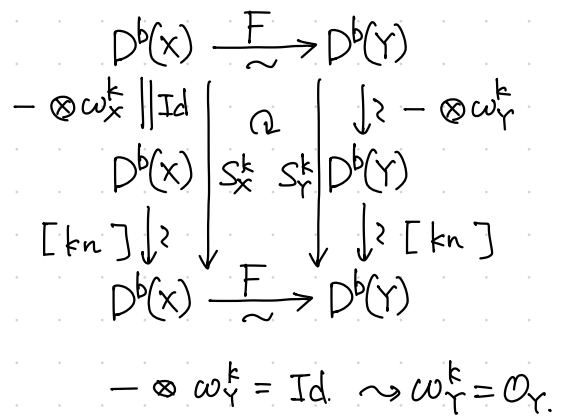
(それぞれ仮定はもう少し必要.)

Prop. 4.1  $D^b(X) \xrightarrow{F} D^b(Y) \Rightarrow \dim X = \dim Y, \text{ord } \omega_X = \text{ord } \omega_Y.$

Step 1.  $F$  は Serre functor と交換するのだから.



Step 2.  $\omega_X^k = \mathcal{O}_X$  になる.



$\leadsto \dim Y = \dim X =: n$

□

# 1. Ample (anti-) canonical bundle

了: Point like object 編

Def. 4.3  $\mathcal{D} : k$  有限体  $\equiv$  有限次元, Semifunctor  $S \in \mathcal{D}$  かつ  $\mathcal{D}$ .

$$P \in \mathcal{D} \text{ は point like object (of codim. } d) \\ \stackrel{\text{def.}}{\iff} \begin{cases} \textcircled{1} S(P) = P[d] \\ \textcircled{2} \text{Hom}(P, P[\text{負}]) = 0 \\ \textcircled{3} \text{Hom}(P, P) =: k(P) \text{ は 体. } \end{cases} \quad \left( \stackrel{\text{def.}}{\iff} P: \text{simple} \right)$$

以下  $\mathcal{D} = D^b(X)$  の  $k$ -スカラーを考えない.

一般  $\{k(x)[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}^{x: X \text{ の 閉点}} \subset \{\text{point like}\} \subset \{\text{simple}\}$

(ex. 4.4:  $\bigcup \text{Calabi-Yau かつ } \{ \text{simple shf.} \} \subset$   
(ie.  $\omega_X = \mathcal{O}_X$ )

Lem. 4.5:  $\bigcup$

$$\{\text{simple, dim Supp} = 0, \textcircled{2}\} \quad (\text{あえてやる})$$

$\omega_X$  と  $\omega_X^\vee$  : ample

Prop. 4.6  $\{k(x)[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}^{x: X \text{ の 閉点}} = \{\text{point like}\} \quad (\text{あえてやる})$

(Bondal, Orlov)

Lem. 4.5.  $\mathcal{F}$ : simple,  $\dim \text{Supp} = 0$ ,  $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}[\ell]) = 0$

$\Rightarrow \exists x: X \text{ の閉点}, \exists m \in \mathbb{Z}, \mathcal{F} \cong k(x)[m]$ .

Step 1.  $\text{Supp } \mathcal{F} = \{x\}$ : 閉点.  $(\because \text{そうでなければ } \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \text{ と非自明に分解} (Lem. 3.9), \text{それは simple じゃない})$

Step 2.  $\mathcal{F} = [0 \rightarrow \mathcal{F}^{m_1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}^{m_0} \rightarrow 0]$  ( $m_1 \leq m_0$ )  
 $\uparrow \quad \downarrow$   
 $\mathcal{H}^{m_1} \neq 0 \quad \mathcal{H}^{m_0} \neq 0$  とする.  $\mathcal{H}^{m_0} \xrightarrow{\neq 0} \mathcal{H}^{m_1}$  が存在する.

$\mathcal{F}[m_0] = [0 \rightarrow \mathcal{F}^{m_1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}^{m_0} \rightarrow 0]$   
 $\downarrow$   
 $\mathcal{F}[m_1] =$

$\downarrow$   
 $\mathcal{H}^{m_0}$   
 $\downarrow$   
 $\mathcal{H}^{m_1}$   
 $\downarrow$   
 $[0 \rightarrow \mathcal{F}^{m_1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}^{m_0} \rightarrow 0]$

$\left. \begin{array}{l} \neq 0 \\ \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}[m_1 - m_0]) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \textcircled{2} \rightarrow m_1 = m_0 \\ \leq 0 \end{array}$

$\mathcal{F}^\bullet = \exists \mathcal{F}[m]$   
 $\sim$   
 $\text{shf.}$

Step 3.  $\mathcal{F}$ : simple,  $\text{Supp} = \{x\} \Leftrightarrow \mathcal{F} \cong k(x)$ .

□.

Prop. 4.6.  
(Bondal, Orlov)

$\omega_X$  or  $\omega_X^\vee$  : ample f.i.s.,  $\{k(x)[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}^{x: X \text{ の閉点}} = \{\text{point like obj.}\}$

Step 1.  $\subset \neq \text{OK}$ .  $(\circ \cdots S_X k(x)[m] = k(x) \otimes \omega_X[m][\dim X] = k(x) \otimes \omega_X[m + \dim X])$

Step 2.  $\supset : P = [0 \rightarrow \underbrace{\quad}_{\text{コホモロジー} \neq 0} \rightarrow 0] : \text{point like obj. of codim.} = d.$   
 $S_X[-] \otimes \omega_X[\dim X]$

$S_X P = [0 \rightarrow \underbrace{\text{全 } \otimes \omega_X}_{\text{コホモロジー} \neq 0 \because \omega_X : \text{inv.}} \rightarrow 0] \leftarrow \dim X \text{ シフト}$   
 仮定 ② 11  $\Rightarrow d = \dim X.$   
 $P[d] = [0 \rightarrow \underbrace{\quad}_{\text{コホモロジー} \neq 0} \rightarrow 0] \leftarrow d \text{ シフト}$   
 $\Rightarrow \forall i, \mathcal{H}^i \otimes \omega_X = \mathcal{H}^i$

Step 3.  $\dim \text{Supp } \mathcal{H}^i = 0. \therefore \text{Hilbert 多項式 を 見る. } \omega_X \text{ or } \omega_X^\vee : \text{ample f.i.s.}$   
 $\dim \text{Supp } \mathcal{H}^i = \underbrace{\chi(\mathcal{H}^i \otimes \omega_X^t)}_{= 0} \text{ の } t\text{-多項式 としての次数} \underbrace{\quad}_{\text{const.}}$   
 $\square$

Rmk. 4.7

$D^b(X)$  の point like obj. の codim は常に  $\dim X$ .

# 1. Ample (anti-) canonical bundle

$\mathcal{D}$ : invertible object 編

Def. 4.8  $\mathcal{D}$ :  $k$  有限体  $\equiv$  有限域  $\tau$ , Serre functor  $S \in \mathcal{D}$  もつて  $\tau$  3.

$L \in \mathcal{D}$  は invertible object

def:  $\forall p$ : point like obj.,  $\exists n_p \in \mathbb{Z}$ ,

$$\text{s.t. } \text{Hom}(L, P[i]) = \begin{cases} k(p) & \text{if } i = n_p \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

以下  $\mathcal{D} = D^b(X)$  のケースしか考えない.

一般

$$\{L[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}^{L \in \text{Pic}(X)} \supset \{\text{inv. obj.}\} \quad (\text{大変})$$

Prop. 4.9.

$\omega_X$  と  $\omega_X^\vee$ : ample

=

(point like obj. が明示  $\tau$  するの  $\tau$  明示が)

Prop. 4.9. のアウトライン:  $L = [0 \rightarrow \boxed{\phantom{0}}^m \rightarrow 0]$ : inv. obj. を取る.

Step 1.  $\mathcal{H}^m$ : loc. free.

$\tau$  3  $\tau$ : stalkwise free  $\dots \dots$  local alg.  $\text{Ext}^1(-, k(x))$  の消滅.

Step 2.  $\text{rk } \mathcal{H}^m = 1$ .

$\tau$  3  $\tau$ : fiber dim = 1  $\dots \dots$   $\dim \mathcal{H}^m \otimes k(x) = 1$ .

Step 3.  $\mathcal{H}^{<m} = 0$ .

Prop. 4.9.  
(Bondal, Orlov)

$$\{L[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}^{L \in \text{Pic}(X)} \supset \{\text{inv. obj.}\}$$

(おい君に教えてもらった)

Step. 1

$$\tau_{cm} L = [0 \rightarrow \boxed{\phantom{0}} \rightarrow 0 \rightarrow 0]$$

$$\downarrow$$

$$L = [0 \rightarrow \boxed{\phantom{0}} \rightarrow 0] : \text{inv. obj.} \text{ 存在.}$$

$$\mathcal{H}^m[-m] =$$

d.t.

$$\text{RHom}(-, k(x_0))$$

$$\uparrow +1$$

$$\text{RHom}(\tau_{cm} L, k(x_0))$$

$$\uparrow$$

$$\text{RHom}(L, k(x_0))$$

$$\uparrow$$

$$\text{RHom}(\mathcal{H}^m[-m], k(x_0))$$

d.t.

$x_0 \in \text{Supp } \mathcal{H}^m$  存在.

$\mathcal{H}^m \neq 0 \rightarrow k(x_0) \neq 0$  あり.

-m-1

-m

-m+1

$$\begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ \text{Hom}(L[m], k(x_0)) \\ \uparrow \\ \text{Hom}(\mathcal{H}^m, k(x_0)) \end{array}$$

$\neq 0 \text{ ③}$

$\neq 0 \text{ ①}$

$$\text{Hom}(L[-m-1], k(x_0))$$

$$\uparrow$$

$$\text{Hom}(\mathcal{H}^m, k(x_0))$$

$= 0 \text{ ②}$

$= 0 \text{ ④}$

$L : \text{inv.}$   
 $k(x_0) : \text{point like}$

$$i: \{x_0\} \hookrightarrow X$$

$$\parallel$$

$$\text{Hom}(Li^* \mathcal{H}^m, \mathcal{O}_{x_0})$$

$$\parallel$$

$$\text{Ext}^1(\mathcal{H}^m_{x_0}, \mathcal{O}_{x_0})$$

$\mathcal{H}^m : \text{loc. free.}$

locally free  $\xleftarrow{\text{coh.}}$  stalkwise free

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in \text{Supp } \mathcal{H}^m \\ x \notin \text{Supp } \mathcal{H}^m \end{array} \right.$$

$$\mathcal{H}^m_x = 0$$

Step. 2  $X: \text{irr. pt.} \supp(\mathcal{F}^m) = X.$

$$0 \neq \text{Hom}(\mathcal{F}^m, k(x)) = \text{Hom}(L, k(x)[-m]) \stackrel{\text{仮定}}{=} k(x) : 1\text{-dim.} \leadsto \mathcal{F}^m: \text{inv. shf.}$$

Step. 3  $\mathcal{F}^m: \text{inv. obj.}$  に注意して  $\square$  を見直すと、最上段が全で済む。

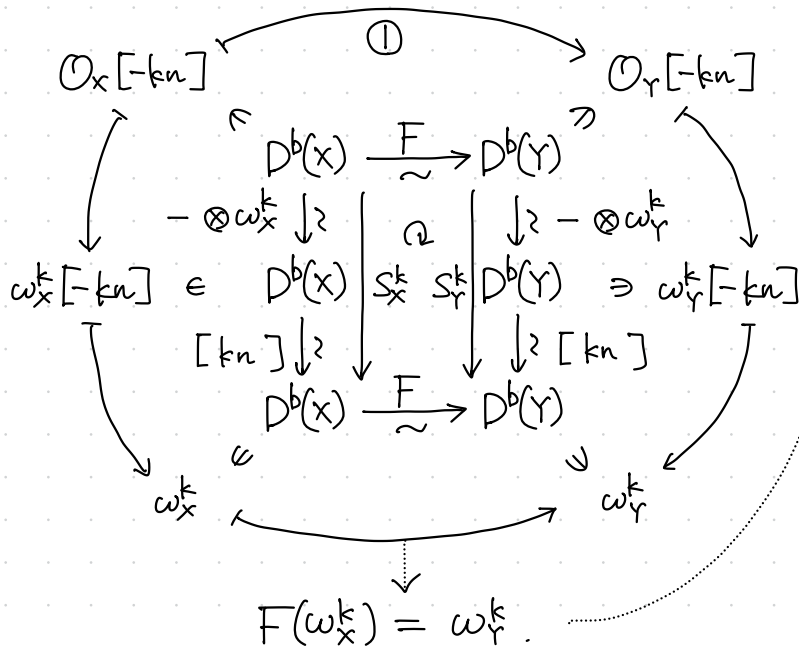
$$\forall x \in X. \text{Hom}(\tau_{mL}, k(x)) = 0 \leadsto \tau_{mL}: \text{acyclic.} \quad \square$$

Rmk. 仮定は、 $\{k(x)[m]\}_{x: X \text{ の閉点}, m \in \mathbb{Z}} = \{\text{point like obj.}\}$  なることに弱められた。  
(4.9+) を示す。

Prop. 4.11.  
(Bondal, Orlov)

①  $\omega_X$  or  $\omega_X^\vee$ : ample f&S,  $D^b(X) \xrightarrow{F} D^b(Y) \Rightarrow X \cong Y$ .

Step 1.  $F(\mathcal{O}_X) \stackrel{①}{=} \mathcal{O}_Y$   $\wedge \rightarrow \omega_Y$  or  $\omega_Y^\vee$ : ample の場合 <sup>同順</sup>



$$H^0(X, \omega_X^k) = \text{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \omega_X^k)$$

$$\xrightarrow{\downarrow F \text{ ①}} \text{Hom}_Y(\mathcal{O}_Y, \omega_Y^k) = H^0(Y, \omega_Y^k)$$

$$\bigoplus_k H^0(X, \omega_X^k) \cong \bigoplus_k H^0(Y, \omega_Y^k)$$

標準環

$$\text{Proj } \bigoplus_k H^0(X, \omega_X^k) \cong \text{Proj } \bigoplus_k H^0(Y, \omega_Y^k)$$

$\parallel$  ①  
X

$\parallel$  ②  
Y

Step 2. ①の仮定を外す.

★ point like と invertible の定義は  $\overbrace{\text{Hom, シフト, Serre functor}}^{F \text{ と同値.}}$  で述べられている. (\*)  
(\*\*)

$$\leadsto \left\{ D^b(X) \text{ の invertible obj. } \right\} \xleftarrow[\text{bij(**)}]{F} \left\{ D^b(Y) \text{ の invertible obj. } \right\}$$

① || (4.9)

② || (4.9)

$$\left\{ L[m] \right\}_{m \in \mathbb{Z}}^{L \in \text{Pic}(X)} \ni \mathcal{O}_X \xrightarrow{F} \exists L[m] \in \left\{ L[m] \right\}_{m \in \mathbb{Z}}^{L \in \text{Pic}(Y)}$$

$$\leadsto \begin{array}{ccccc} D^b(X) & \xrightarrow[\sim]{F} & D^b(Y) & \xrightarrow[\sim]{\otimes L^\vee} & D^b(Y) & \xrightarrow[\sim]{[-m]} & D^b(Y) \\ \downarrow & & & & & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & & & & \mathcal{O}_Y \end{array} \quad \text{に 取り換える.}$$

Step. 1 を適用する.

Step.3 ②の仮定を外す.

$$\{D^b(X) \text{ の point like obj.}\} \xleftrightarrow[bij(*)]{F} \{D^b(Y) \text{ の point like obj.}\}$$

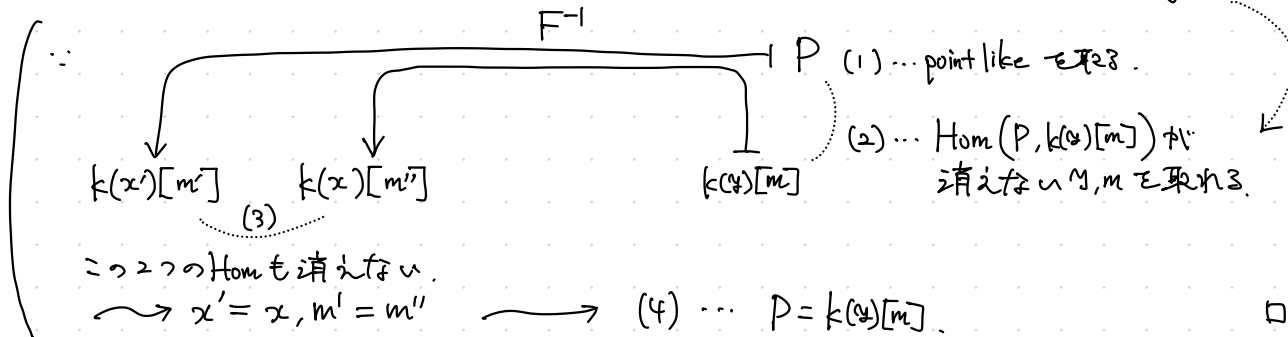
① ||

$$\{k(x)[m]\}_{x: X \text{ の 閉点}, m \in \mathbb{Z}}$$

U |

$$\{k(y)[m]\}_{y: Y \text{ の 閉点}, m \in \mathbb{Z}}$$

Step.3-1 これは 1コ-1ル.  
: spanning 類



Step.3-2 (4.9+) Step.2 前半を同じく  $F(O_X) \stackrel{②}{=} O_Y$  だととしてよい.

$\omega_X^k$ : very ample となる  $k$  を取る.  $\omega_Y^k$ : very ample なる  $k/p$ .

$\Leftrightarrow$  点  $x$  を  $\mathbb{A}^1$  に分離する.

◦  $\omega_Y^k$  が 点  $x$  を分離する

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall y_0 \neq y_1: Y \text{ の 閉点}, H^0(Y, \omega_Y^k) \xrightarrow{\text{res.}} H^0(Y, k(y_0) \oplus k(y_1)) : \text{surj.}$$

◦  $\mathbb{A}^1$  を  $\mathbb{A}^1$  に分離する

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall y: Y \text{ の 閉点}, \forall Z_y: \text{点 } y \text{ 上, } \mathbb{A}^1 \hookrightarrow Y, H^0(Y, \omega_Y^k) \xrightarrow{\text{res.}} H^0(Y, \mathcal{O}_{Z_y}) : \text{surj.}$$

Step. 3-3  $\omega_Y^k$  は点  $z$  を分離する.

$y_0, y_1$  に対応する  $X$  の閉点を  $x_0, x_1$  とする.

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(Y, \omega_Y^k) & \xrightarrow{\text{res}} & H^0(Y, k(y_0) \oplus k(y_1)) \\
 \parallel & & \parallel \\
 \text{Hom}_Y(\mathcal{O}_Y, \omega_Y^k) & \xrightarrow{\text{res} \circ -} & \text{Hom}_Y(\mathcal{O}_Y, k(y_0) \oplus k(y_1)) \\
 \uparrow F & & \uparrow F \\
 \text{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \omega_X^k) & \xrightarrow[\text{res} \circ -]{\text{res}} & \text{Hom}_X(\mathcal{O}_X, k(x_0) \oplus k(x_1)) \\
 \parallel & & \parallel \\
 H^0(Y, \omega_Y^k) & \xrightarrow{\text{res}} & H^0(Y, k(x_0) \oplus k(x_1))
 \end{array}$$

$\therefore \text{Hom}(\omega_Y^k, k(x_i)) \neq 0$  :  $\omega_Y^k$  は  $z$  を分離する.  
 $\omega_X^k$  : very ample  $\therefore$  surj.

Step. 3-4  $\omega_Y^k$  は  $\{z\}$  を分離する.  $y$  に対応する  $X$  の閉点を  $x$  とする.

$$\text{Ext}^1(k(y), k(y)) \supset [0 \rightarrow k(y) \rightarrow \mathcal{O}_{Z_y} \rightarrow k(y) \rightarrow 0]$$

$$\begin{array}{c}
 \parallel \\
 \text{Hom}(k(y), k(y)[1]) \\
 \uparrow F
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{surj.} \uparrow \swarrow \text{NAK} \nearrow \text{surj.} \\
 \omega_Y \uparrow F
 \end{array}$$

$$\text{surj.} \uparrow \text{ if } z \simeq \text{res.}$$

$$\text{Hom}(k(x), k(x)[1]) \supset [0 \rightarrow k(x) \rightarrow \mathcal{O}_{Z_x} \rightarrow k(x) \rightarrow 0] : \{x\} \text{ 上の長さ 2 のスケーラを定める.}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{res} \uparrow \nearrow \\
 \omega_X
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_Y(\mathcal{O}_Y, \omega_Y^k) & \xrightarrow{\text{res} \circ -} & \text{Hom}_Y(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{Z_y}) \\
 \uparrow F & & \uparrow F \\
 \text{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \omega_X^k) & \xrightarrow[\text{res} \circ -]{\text{res}} & \text{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{Z_x})
 \end{array}$$

これは上の prf. と同様.

Bondal-Orlov  
reconstruction thm.  
完

Prop. 4.11.  
(Bondal, Orlov)

$\omega_X$  or  $\omega_X^\vee$ : ample for,  $\text{Aut}(D^b(X)) \cong \mathbb{Z} \times \left( \text{Aut}(X) \ltimes \text{Pic}(X) \right)$   
 $[i] \quad f_*, f^* \quad - \otimes L$

Step 1 シフトと Pic で  $\mathcal{O}_X \mapsto \mathcal{O}_X$  となるよう調整できるのだった (cf. 4.11).

このとき ~~標準環~~ の同型  $\bigoplus_{\mathbb{F}} H^0(X, \omega_X) \cong \bigoplus_{\mathbb{F}} H^0(X, \omega_X)$  があるのだった (---).

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \text{Proj} & \downarrow \\ X & \cong & X \\ & \varphi & \end{array}$$

Step 2  $\varphi^*$  と合成し.  $\mathcal{O}_X \mapsto \mathcal{O}_X$  のまま ~~標準環~~ 上で id にできる.

する (4.23) よりこれは Id と自然同型である.

Step 3  $\varphi^*(L \otimes \mathcal{F}) \cong \varphi^*(L) \otimes \varphi^*(\mathcal{F})$  より  $\times$ .

□

### 3. Ample sequences in derived categories

Def. 4.19 (cf. Def. 2.72, Prop. 3.17)  $\mathcal{A} : k\text{-}\widehat{\text{fin}}\text{-}\widehat{\text{Abel}}\text{-}\widehat{\text{cat}} \neq \emptyset$ .

$\{L_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}$  is ample sequence

$$\stackrel{\text{def.}}{\iff} \begin{cases} \forall A \in \mathcal{A}, \\ \exists i_0(A), \forall i < i_0(A) \end{cases} \begin{cases} \text{i) } \text{Hom}(L_i, A) \otimes_k L_i \xrightarrow{\text{surj.}} A \\ \text{ii) } \text{Hom}(L_i, A[\neq 0]) = 0 \\ \text{iii) } \text{Hom}(A, L_i) = 0 \end{cases}$$

o. 思い出し (Rmk. 4.20) :

$$\left( \begin{array}{l} (\text{Lem. 2.73}) \text{ homol. dim. } \mathcal{A} < \infty \\ \Rightarrow \mathcal{A} \text{ の ample seq. は } D^b(\mathcal{A}) \text{ の spanning 類 を なす.} \end{array} \right.$$

★ key idea.  $\{ \xrightarrow{\quad\quad\quad} \} : \text{ample seq.}$

$\longleftarrow$

どれだけ下をとり出しても spanning 類 を なす.

$\xrightarrow{\quad\quad\quad}$

どれだけ 間引き しても spanning 類 を なす.

Cor. 4.21  
(Orlov)

homol. dim.  $\mathcal{A} < \infty$ ,  $\{L_i\}$ : ample seq. を持つ.

$F: D^b(\mathcal{A}) \rightarrow D$ : exact, 左右随伴を持つ.

$$\leadsto F: f.f. \Leftrightarrow \forall j \ll 0, \forall i \ll j, \forall m, \quad \text{Hom}(L_i, L_j[m]) \cong \text{Hom}(F(L_i), F(L_j)[m])$$

だいたい f.f.  $\Leftrightarrow$  ample seq. 上で f.f.

Rmk. f.f.  $\Leftrightarrow$  span.class 上で f.f. (1.49) の変種.

prf.  $\Leftarrow$  は非自明。  $G \dashv F \dashv H$  を示す.

◦  $\{L_j\}_{j \ll 0}$  上で  $\text{Id} \stackrel{\text{unit}}{\sim} HF$  を示す.

$$\left( \begin{array}{l} j \ll 0 \text{ で unit の補完 } L_j \xrightarrow{\text{red}} HF(L_j) \rightarrow A^{\bullet+1} : \text{d.t. (取れ)} \\ i \ll j \text{ で } \text{Hom}(L_i, -) \quad \bigcirc \stackrel{\text{red}}{\sim} \bigcirc \rightarrow 0 \quad (\forall \text{ igt}) \\ \{L_i\}_{i \ll j} : \text{spanning 類 上) } A^{\bullet} \simeq 0. \leadsto L_j \stackrel{\text{red}}{\star} HF(L_j) \end{array} \right.$$

◦  $D^b(\mathcal{A})$  全体で  $GF \stackrel{\text{counit}}{\sim} \text{Id}$  を示す.

$$\left( \begin{array}{l} \text{counit の補完 } GF(A^{\bullet}) \xrightarrow{\text{blue}} A^{\bullet} \rightarrow B^{\bullet+1} : \text{d.t. (取れ)} \\ j \ll 0 \text{ で } \text{Hom}(-, L_j) \quad \bigcirc \stackrel{\text{red}}{\star} \bigcirc \rightarrow 0 \quad (\forall \text{ igt}) \\ \{L_j\}_{j \ll 0} : \text{spanning 類 上) } B^{\bullet} \simeq 0. \leadsto GF(A^{\bullet}) \stackrel{\text{blue}}{\sim} A^{\bullet} \end{array} \right.$$

◦ これは  $F: f.f.$  を意味する.

□

Cor. 4.23  
(Bondal-Orlov)

$\{L_i\}$ : ample seq. を持つ.

$F: D^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{A})$ : exact

$\leadsto f: Id|_{\{L_i\}} \xrightarrow{\sim} F|_{\{L_i\}}$  は一意に  
 $\tilde{f}: Id|_{D^b(\mathcal{A})} \xrightarrow{\sim} F$  に延長される.

$$\begin{array}{ccc} \{L_i\} & \xrightarrow[\text{F}|_{\{L_i\}}]{\text{Id}} & \{L_i\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^b(\mathcal{A}) & \xrightarrow[\text{F}]{\tilde{f}} & D^b(\mathcal{A}) \end{array}$$

Rmk.  $Aut(D^b(\mathcal{A})) \xrightarrow{res} Aut(\{L_i\})$  は inj.

Outline.

ample seq. による特徴づけ

Step. 1  $\mathcal{A} \hookrightarrow D^b(\mathcal{A})$  の像 =  $\left\{ A^* \left| \begin{array}{l} \forall j \neq 0 \\ \forall i \ll 0 \end{array} \text{Hom}(L_i, A^*[j]) = 0 \right. \right\}$

= 十分  $i \ll 0$  で  $Ext^{\neq 0}(L_i, A^*)$  が消滅

Step. 2 上を使うと.

$F$  は  $\mathcal{A}$  の像を再び  $\mathcal{A}$  の像にうつす.

Step. 3  $i \ll 0$  で  $L_i^{\oplus n} \xrightarrow{\text{surj.}} A$  があり.

要チェック

- well-def 性
- 関手性

◦  $\tilde{f}_A: \text{iso}$

$$\begin{array}{ccc} f_{L_i}^{\oplus n} \downarrow & \Rightarrow & \exists! \tilde{f}_A \\ F(L_i)^{\oplus n} & \xrightarrow[\text{surj.}]{} & F(A) \\ \text{d.t.} \mapsto \text{d.t.} & & \\ A[n] \mapsto A[n] & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \{L_i\} & \xrightarrow[\text{F}|_{\{L_i\}}]{\text{Id}} & \{L_i\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A} & \xrightarrow[\text{F}|_{\mathcal{A}}]{\tilde{f}} & \mathcal{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^b(\mathcal{A}) & \xrightarrow[\text{F}]{\tilde{f}} & D^b(\mathcal{A}) \end{array}$$

Step. 4 複体の長土について帰納的に  $\tilde{f}_A$  を構成する.

$$\left[ \begin{array}{c} \oplus^n \\ L_i \end{array} \right] = L_i^{\oplus n}[-m] \xrightarrow[\sim]{\tilde{f}_{L_i}^{\oplus n}} F(L_i)^{\oplus n}[-m]$$

$$\left[ 0 \rightarrow \boxed{\quad \bigcirc_m \quad} \rightarrow 0 \right] = A^* \xrightarrow[\text{TR3}]{\exists! \tilde{f}_A} F(A^*)$$

$$\left[ 0 \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \right] = B^* \xrightarrow[\sim]{\tilde{f}_B} F(B^*)$$

要チェック

- well-def 性
- 関手性
- $\tilde{f}_A: \text{iso}$

□

Cor. 4.24  
(Kawamata)

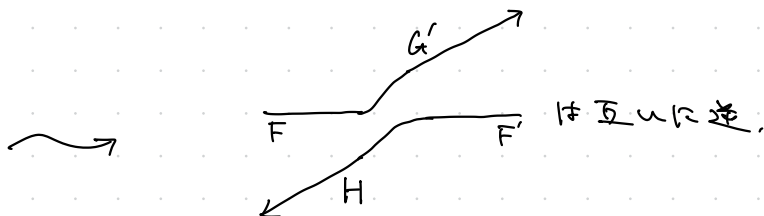
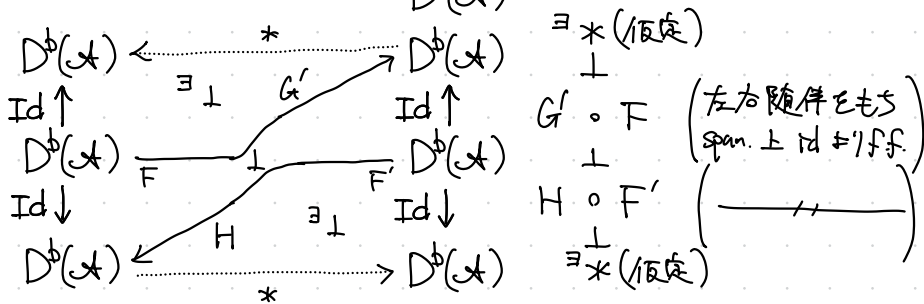
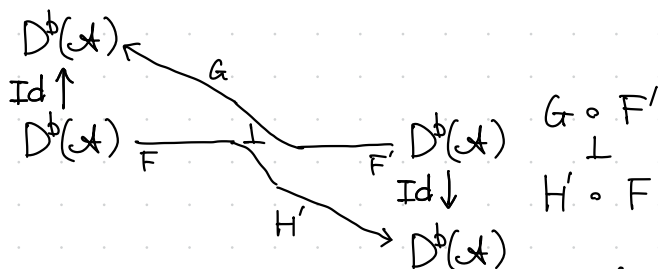
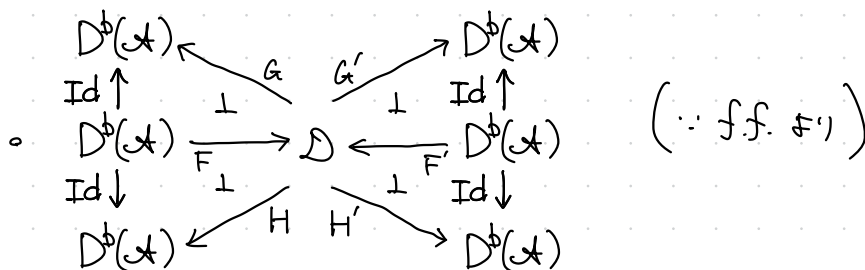
homol. dim.  $\mathcal{A} < \infty$ ,  $\{L_i\}$ : ample seq. を持つ  
 $F, F': D^b(\mathcal{A}) \rightrightarrows \mathcal{D}$ : exact, 左右随伴を持つ.

$F$ : f.f. である (Fの右随伴)  $\circ F'$ : 右随伴を持つ  
 (Fの左随伴)  $\circ F$ : 左随伴を持つ

$\xi: F|_{\{L_i\}} \xrightarrow{\sim} F'|_{\{L_i\}}$  は一意に  
 $\tilde{\xi}: F \xrightarrow{\sim} F'$  に延長される.

Step. 1  $\circ F'$  も f.f. (左右随伴を持ち. span. 上で  $F|_{\{L_i\}} \simeq F'|_{\{L_i\}}$  は f.f.)

( $\xi$ 以前)



Step 2.

( $\xi$  の構成)

$$\text{仮定: } F|_{\{L_i\}} \xrightarrow{\sim} F'|_{\{L_i\}}$$

$$f : \text{Id}_{\{L_i\}} \xrightarrow[\sim]{\text{unit}} H \circ F|_{\{L_i\}} \xrightarrow{\sim} H \circ F'|_{\{L_i\}}$$

$$\tilde{f} : \text{Id} \xrightarrow[\sim]{\exists ! f, \text{unit}} H \circ F'$$

$$F \xrightarrow[\sim]{\text{red arrow}} F \circ (H \circ F')$$

$\{L_i\}$  上  $\tau$  は  $\xi$ .

$\sim$

$$F' \xleftarrow{\text{red arrow}} (F \circ H) \circ F'$$

$$\text{Id} \xleftarrow{\text{green arrow}} F \circ H : \text{counit}$$

Step 3.

$$F(A^\bullet) \xrightarrow[\sim]{\xi_{A^\bullet}} F'(A^\bullet) \xrightarrow{\psi} B^\bullet \xrightarrow{+1} : \text{d.t.} \quad \text{補完を取る.}$$

$\downarrow H: \text{ex.}$

$$HF(A^\bullet) \rightarrow HF'(A^\bullet) \xrightarrow{H(\psi)} H(B^\bullet) \xrightarrow{+1} : \text{d.t.}$$

$$\begin{array}{c} \text{Id} \\ \downarrow \tilde{f} \\ H \circ F' \end{array}$$

$$HF(H \circ F')(A^\bullet) = H(F \circ H)F'(A^\bullet)$$

$$\begin{array}{ccc} H & \xleftarrow{\text{green arrow}} & \text{Id} \\ \uparrow \tilde{f} & \text{F: f.f.} & \uparrow \text{counit} \\ H(F \circ H) & & F \circ H \end{array}$$

$$\leadsto H(B^\bullet) = 0.$$

Step 4.

( $\xi$  : iso)

$$\begin{aligned} \text{Hom}(L_i[L_j], H(B^\bullet)) &\stackrel{F \mapsto H}{=} \text{Hom}(F(L_i[L_j]), B^\bullet) \\ &\stackrel{\text{Step 2.}}{=} \text{Hom}(F'(L_i[L_j]), B^\bullet) = \text{Hom}(L_i[L_j], H'(B^\bullet)) \end{aligned}$$

Spanning 類  $\Rightarrow \parallel \star$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(F' \begin{pmatrix} A^\bullet \\ \psi \\ \psi \end{pmatrix}, B^\bullet) & = & \text{Hom} \begin{pmatrix} A^\bullet \\ F \mapsto H' \\ 0 \end{pmatrix}, H'(B^\bullet) \end{array}$$

$$\leadsto F(A^\bullet) \simeq F'(A^\bullet) \oplus B^\bullet[-1] \leadsto F(A^\bullet) \xrightarrow[\sim]{\xi_{A^\bullet}} F'(A^\bullet).$$

$$\bigcap \text{Hom}(F(A^\bullet), B^\bullet[-1]) \stackrel{F \mapsto H}{=} \text{Hom} \begin{pmatrix} A^\bullet \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H(B^\bullet)[-1]$$

□